Καμπύλες

• Να προσδιοριστεί το είδος των καμπυλών

$(C_1): x \cdot y = 1$ ①

$(C_2): 5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$ ②

ΛΥΣΗ

Επιλέγω τον πίνακα τετραγωνικής μορφής

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{με } q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : q(x,y) = xy.$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = x^2 - \frac{1}{4}$$

ιδιοτιμές οι $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ Υπερβολή

Έπειτα, $\underline{V(\tfrac{1}{2})}: (A - \tfrac{1}{2}I)u = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{x = -y}$

$$V(\tfrac{1}{2}) = \langle (-1, 1) \rangle = \langle (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$$

Παρομοίως, $V(-\frac{1}{2}) = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$ ώστε να είναι 2 ιδιόχωροι κάθετοι μεταξύ τους

Άρα, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ⇝ ώστε $\det P > 0$ γιατί άλλαξα το πρόσημο στον $V(\frac{1}{2})$

Έπειτα, $(x, y) = (x', y')P^t = (x', y')\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$

$$= \left(x'\frac{1}{\sqrt{2}} - y'\frac{1}{\sqrt{2}},\ x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases} \overset{①}{\Longrightarrow} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = 1 \quad (\text{Υπερβολή})$$

Επιλέγω την κατάλληλη τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ και πίνακα της $q$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 5-x & -2 \\ -2 & 8-x \end{pmatrix} = (5-x)(8-x) - 4 =$$
$$= x^2 - 13x + 36.$$

$$\Delta = 169 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 > 0$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{2} \rightrightarrows \begin{matrix} 4 \\ 9 \end{matrix}$$

$\chi_A(x) = (x-4)\cdot(x-9)$ με $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = 9$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ έλλειψη

• $(A - 4I)u = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2y$, $V(4) = \langle (1,2) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rangle$

• Προφανώς, $V(9) = \langle (-2,1) \rangle = \langle \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \rangle$

και $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ώστε $\det P > 0$

$(x,y) = (x', y')P^t \overset{②}{\Rightarrow} 9x'^2 + 4y'^2 = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{1/9} + \frac{y'^2}{1/4} = 1$, έλλειψη

Καμπύλες

- Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης

$$(C): 9x^2-4xy+6y^2+3z^2+2\sqrt{5}x+4\sqrt{5}y+12z+16=0 \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Έστω $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $q(x,y,z)=9x^2+6y^2+3z^2-4xy$
και ο πίνακας της $q$:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x)=\det(A-xI)=\begin{pmatrix} 9-x & -2 & 0 \\ -2 & 6-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix}=3-x\Big((9-x)(6-x)-4\Big)=$$

$$=-(x-10)\cdot(x-5)(x-3)$$

Ιδιοτιμές οι $\lambda_1=10$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=3 \Rightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3>0$ Ελλειψοειδές
Με γνωστό τρόπο βρίσκουμε τους ιδιοχώρους

$V(10)=\langle(-2,1,0)\rangle=\langle\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\rangle \leftarrow$ κανονικοποιούμε

$V(5)=\langle(1,2,0)\rangle=\langle\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right)\rangle \leftarrow$ —"—

$V(3)=\langle(0,0,1)\rangle \leftarrow$ κανονική

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιλέγουμε, $(x',y',z')=(x,y,z)P$
ή $(x,y,z)=(x',y',z')P^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \\ y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ z=z' \end{cases}$$

Στην (1) $\rightsquigarrow 10x'^2+5(y'^2+2y'+1)+3(z'^2+4z'+4)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10x'^2+5(y'+1)^2+3(z'+2)^2=1$

Θέτω, $\begin{cases} X = x' \\ Y = y+1 \\ Z = z+2 \end{cases}$

Πιο αναγνωρίσιμη μορφή:

Καμπύλες

- Έστω η τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2x^2 - 2xy$$

1) Να αναχθεί στους κ άξονες, οι οποίοι και να βρεθούν
2) Ποιο το είδος της τετραγωνικής επιφάνειας;

$$(S): \ 3x^2 + 3y^2 + 2x^2 - 2xy = 8.$$

3) ΝΔΟ ο A θετικός (πίνακας της τετραγωνικής μορφής) και έπειτα να βρεθεί ο B συμμετρικός και αντιστρέψιμος ώστε $B^2 = A$

ΛΥΣΗ

1) Βρίσκω τον τετραγωνικής μορφής πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} 3-x & -1 & 0 \\ -1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 \cdot (4-x)$$

Με γνωστή διαδικασία:

$$V(2) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle = \langle (\tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2}, 0), (0,0,1) \rangle$$

$$V(4) = \langle (1,-1,0) \rangle = \langle (\tfrac{1}{\sqrt2}, -\tfrac{1}{\sqrt2}, 0) \rangle$$

2) άρα $q(x', y', z') = 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2$

άρα $2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 8 \Rightarrow \frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{4} + \frac{(z')^2}{2} = 1$

3) $\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2(9-1) = 16 > 0$ ελλειψοειδές

$B^2 = P \Lambda P^t \Rightarrow P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^t = B$ με $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$